

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2023/24
ESERCIZI PER CASA

1. Esercizi del 15 marzo

Scegli 3 fra gli esercizi seguenti e consegna le soluzioni il giorno venerdì 22 marzo a lezione.

Esercizio 1.1. Determina la segnatura della matrice seguente, al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix},$$

Esercizio 1.2. Sia $V = M(2)$ lo spazio formato dalle matrici reali 2×2 . Considera il prodotto scalare

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB).$$

- (1) Esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$ di dimensione 1 tale che $W \subset W^\perp$?
- (2) Calcola la segnatura della restrizione del prodotto scalare al sottospazio $S \subset V$ formato da tutte le matrici simmetriche.

Esercizio 1.3. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio formato dai polinomi reali di grado ≤ 2 . Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

dove p' e p'' sono i polinomi ottenuti come derivata prima e seconda di p . Considera l'insieme $W \subset \mathbb{R}_2[x]$ formato da tutti i polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = -1$, cioè tali che $p(-1) = 0$.

- (1) Mostra che il prodotto scalare è definito positivo.
- (2) Trova una base ortogonale per il prodotto scalare.
- (3) Mostra che W è un sottospazio vettoriale e calcola la sua dimensione.
- (4) Determina il sottospazio ortogonale W^\perp .

Esercizio 1.4. Sia V spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali qualsiasi. Mostra i fatti seguenti:

- (1) Se $U \subset W$, allora $W^\perp \subset U^\perp$.
- (2) $U \subset (U^\perp)^\perp$. Se g è definito positivo, allora $U = (U^\perp)^\perp$.

Esercizio 1.5. Calcola determinante e segnatura della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, per ogni $n \geq 1$ considera la matrice $(2n) \times (2n)$ seguente:

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

dove 0_n e I_n sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità, entrambe $n \times n$. Calcola il determinante e la segnatura di S_{2n} .

2. Esercizi del 27 aprile

Scegli 3 fra gli esercizi seguenti e consegna le soluzioni il giorno mercoledì 8 maggio a lezione.

Esercizio 2.1. Considera le rette

$$r = \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad s = \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \end{cases}$$

- (1) Determina se le rette sono incidenti, parallele o sghembe.
- (2) Determina la distanza fra le due rette e una retta perpendicolare a entrambe.

Esercizio 2.2. Descrivi nella forma $f(x) = Ax + b$ una rotazione di angolo π intorno alla retta affine

$$r = \{x = 1, y = -1\}.$$

Devi trovare la matrice A ed il vettore b .

Esercizio 2.3. Siano $P, Q \in \mathbb{R}^2$ due punti distinti del piano.

- (1) Siano f e g due rotazioni di angolo $\pi/2$ rispettivamente intorno a P e Q . Che tipo di isometria è la composizione $f \circ g$?
- (2) Siano f e g due rotazioni di angolo π rispettivamente intorno a P e Q . Che tipo di isometria è la composizione $f \circ g$?

In entrambe le domande cercate di dare più informazioni che potete sulla isometria $f \circ g$.

Esercizio 2.4. Considera in \mathbb{R}^3 il piano

$$\pi = \{z = 1\}$$

e la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Determina la distanza fra π e r .
- (2) Determina equazioni cartesiane per il piano π' contenente r e perpendicolare a π .
- (3) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sposti il piano π in π' , cioè tale che $f(\pi) = \pi'$. Devi determinare la matrice A ed il vettore b .